

ÁP DỤNG KỸ THUẬT TÍCH PHÂN MỚI CHO PHẦN TỬ HỮU HẠN LẬP PHƯƠNG BẬC CAO (HH20) TRONG PHÂN TÍCH PHI TUYẾN HÌNH HỌC

GEOMETRICALLY NONLINEAR ANALYSIS OF 3D STRUCTURES BY HH20 ELEMENT WITH NEW NUMERICAL INTEGRATION SCHEMES

Nguyễn Đình Du^{1a*}, Nguyễn Khánh Hùng^{1b}

¹Khoa Kỹ thuật Công trình, Đại học Lạc Hồng
^adinhdu85@gmail.com, ^bnguyenkhanhhung1979@gmail.com

TÓM TẮT: Tích phân Gaussian là một phần không thể thiếu khi tính toán ma trận độ cứng cũng như vec tơ lực trong hầu hết các phương pháp số. Phần tử giác bậc cao (Q8 và Q9) trong FEM cần số điểm tích phân tối thiểu Gaussian 3×3 trong khi phần tử lập phương bậc cao (HH20) thì cần tối thiểu $3 \times 3 \times 3$ để đảm bảo sự ổn định và tính chính xác. Tuy nhiên, trong phân tích phi tuyến hình học thì cần nhiều vòng lặp nên tốn thời gian tính toán. Do đó, trong nghiên cứu này, một phương pháp tích phân mới dựa trên công bố bởi nhóm tác giả Jeyakarthikeyan P.V sẽ được cải tiến cho 3D được gọi là 3D-EM với chín điểm tích phân. Mô hình tích phân thay thế 3D-EM được áp dụng vào phần tử HH20 nhằm rút ngắn thời gian tính toán nhưng vẫn đảm bảo sự ổn định và chính xác. Hai ví dụ số sẽ được trình bày để đánh giá hiệu suất của phương pháp tích phân mới so với tích phân Gaussian truyền thống trong phần tử HH20.

KEYWORDS: Geometrically nonlinear analysis, FEM, numerical integration, quadratic hexahedral, nearly incompressible

ABSTRACT: Gaussian integration is an integral part of the hardness matrix as well as force vectors in most numerical methods. The high-order quadrilateral (Q8 and Q9) in FEM needs a minimum number of 3×3 Gaussian integral points while the higher-order cube (HH20) needs a minimum of $3 \times 3 \times 3$ to ensure stability and accuracy. However, in geometric nonlinear analysis, many loops are needed, so it takes time to calculate. Therefore, in this study, a new integral method based on published by Jeyakarthikeyan P.V authors will be improved for 3D called 3D-EM with nine integral points. The 3D-EM replacement integral model is applied to the HH20 element to shorten the calculation time but still ensure stability and accuracy. Two numerical examples will be presented to evaluate the efficiency of the new integral method compared to the traditional Gaussian integral in the HH20 element.

TỪ KHOÁ: Phân tích hình học phi tuyến tính, FEM, tích phân số, lục diện bậc hai,

1. GIỚI THIỆU

Mô hình hóa và mô phỏng số đã trở thành một công cụ quan trọng giúp các kỹ sư và nhà thiết kế đưa ra quyết định trong quá trình thiết kế kỹ thuật, nhằm nâng cao chất lượng và độ bền của sản phẩm. Tuy nhiên, hầu hết trong các ứng dụng kỹ thuật, sự thay đổi cấu trúc hình học của các vấn đề phân tích là đáng kể và không thể bỏ qua, ví dụ trong phân tích độ ổn định cấu trúc [1, 2] hoặc trong quá trình tạo hình kim loại [3]. Trong các bài toán như vậy, khi xảy ra biến dạng lớn hoặc chuyển vị lớn, tính phi tuyến hình học của kết cấu phải được tính đến [4]. Rõ ràng, các bài toán hình học phi tuyến đã và đang tiếp tục trở thành một chủ đề nghiên cứu quan trọng trong cộng đồng khoa học. Các cách tiếp cận khác nhau đã được phát triển để mô hình hóa các vấn đề hình học phi tuyến của cấu trúc. Ví dụ, mô tả chi tiết về quy trình tính toán dựa trên phương pháp phần tử hữu hạn (FEM) để phân tích hình học phi tuyến của dầm, khung, vòm và vỏ đối xứng trục đã được trình bày trong [5]; Izzuddin [6] đã thảo luận về các vấn đề khái niệm trong phân tích phi tuyến hình học cho các cấu trúc khung 3D; Lopez và La Sala [7] cũng sử dụng FEM để phân tích tĩnh và động của các cấu trúc phi tuyến hình học; Kurtaran [8] đã phát triển phương pháp cầu phương vi phân tổng quát cho chuyển tiếp phi tuyến tính về mặt hình học của các dầm cong phức hợp dày; Lin và cộng sự [9] đã phát triển một phương pháp thủy động lực học hạt được làm mịn được cải tiến để phân tích hình học phi tuyến tính của các

cấu trúc 2D. Gần đây, Cho et al. [10] đã phát triển công thức động phi tuyến hình học sử dụng các phần tử rắn đồng quay 3D, Mei et al. [2] cải thiện sự hội tụ số của các bài toán cơ giãn phi tuyến tính cao, và Liang et al. [11] đề xuất một phương pháp Koiter-Newton kiểu Newton đã được sửa đổi để truy tìm phản ứng phi tuyến tính về mặt hình học của các cấu trúc.

Một vấn đề quan trọng khác liên quan đến phân tích phi tuyến hình học, ví dụ phần tử có hàm dạng tuyến tính Q4 cho 2D hoặc HH8 cho 3D là không đủ hội tụ cho các vấn đề biến dạng lớn. Do đó phải cần các phần tử bậc hai hoặc bậc cao hơn để sử dụng. Khía cạnh quan trọng khi sử dụng các phần tử bậc cao nằm ở việc yêu cầu nhiều điểm vuông góc Gauss hơn cho mục đích tích phân số của chúng, điều này thường gây ra sự gia tăng của chi phí tính toán. Do đó, điều này rõ ràng thúc đẩy chúng tôi đề xuất mô hình tích phân số mới để phân tích hình học phi tuyến với ít nỗ lực tính toán hơn (tức là ít điểm vuông góc hơn). Thay vì phương pháp vuông góc Gaussian thông thường, các sơ đồ tích phân số thay thế dựa trên khái niệm quy tắc điểm giữa được báo cáo gần đây trong [12] được áp dụng cho các công thức nguyên tố hiện tại.

Received: 18, 05, 2021

Accepted: 16, 12, 2021

*Corresponding Author: Nguyễn Đình Du

Email: dinhdu85@gmail.com

Các phương án do [12] đề xuất mới chỉ được nghiên cứu trong các bài toán tuyến tính và 2D. Vì vậy, nó là giá trị điều tra hiệu suất của chúng trong phân tích phi tuyến. Đối với các bài toán 3D, chúng tôi đề xuất trong bài báo này kỹ thuật tích hợp thay thế dựa trên khái niệm quy tắc điểm giữa, đó là điểm giữa của phần tử (EM), được sử dụng trong công thức phần tử HH20. Công thức Lagrange tổng được chấp nhận cho các giải pháp phi tuyến. Bài toán phi tuyến được tuyến tính hóa và giải lặp lại bằng phương pháp Newton-Raphson. Giá trị tính toán của phương pháp đã phát triển được minh họa thông qua hai ví dụ số bài toán 3D. Các khía cạnh số khác nhau bao gồm độ chính xác, tốc độ hội tụ, hiệu quả tính toán, độ nhạy với biến dạng lưới, v.v., được phân tích thông qua hai ví dụ số với các cấu hình đơn giản và phức tạp.

2. PHƯƠNG TRÌNH TỔNG QUÁT PHI TUYẾN HÌNH HỌC

Phân tích phi tuyến hình học có tính đến sự thay đổi hình học do biến dạng và ứng suất ban đầu gán cho phần tử (nếu có). Một điểm trong cấu hình ban đầu được ký hiệu là X và điểm đó trong cấu hình hiện tại được ký hiệu là $x = X + u$, với u là chuyển vị. Việc cập nhật cấu hình đạt được bằng cách sử dụng công thức Lagrange tổng như sau:

$$(K_1 + K_2)\Delta u = F_{ext} - F_{int} = R \quad (1)$$

Trong đó Δu là độ gia tăng chuyển vị, K_1 và K_2 lần lượt là thành phần ma trận độ cứng thứ nhất và thứ hai, F_{ext} là vectơ ngoại lực trong khi F_{int} là vectơ nội lực.

$$K_1 = \int_{\Omega} B_1^T DB_1 d\Omega, \quad (2)$$

$$K_2 = \int_{\Omega} B_2^T SB_2 d\Omega, \quad (3)$$

$$F_{ext} = \int_{\Omega} N^T b d\Omega + \int_{\Gamma} N^T t d\Gamma, \quad (4)$$

$$F_{int} = \int_{\Omega} B_1^T \{S\} d\Omega, \quad (5)$$

Ma trận tính biến dạng B_1 và B_2 trong phương trình (2) và (3) được tính như sau:

$$B_1 = [B_1^1 \ B_1^2 \ \dots \ B_1^i \ \dots \ B_1^{ne}] \quad (6)$$

$$B_2 = [B_2^1 \ B_2^2 \ \dots \ B_2^i \ \dots \ B_2^{ne}] \quad (7)$$

Trong đó $i = 1, 2, 3, \dots, ne$ là chỉ số nút và

$$B_1^i = \begin{bmatrix} F_{11}N_{i,1} & F_{21}N_{i,1} & F_{31}N_{i,1} \\ F_{12}N_{i,2} & F_{22}N_{i,2} & F_{21}N_{i,2} \\ F_{13}N_{i,3} & F_{23}N_{i,3} & F_{33}N_{i,3} \\ F_{11}N_{i,2} + F_{12}N_{i,1} & F_{21}N_{i,2} + F_{22}N_{i,1} & F_{31}N_{i,2} + F_{32}N_{i,1} \\ F_{12}N_{i,3} + F_{13}N_{i,2} & F_{22}N_{i,3} + F_{23}N_{i,2} & F_{32}N_{i,3} + F_{33}N_{i,2} \\ F_{11}N_{i,3} + F_{13}N_{i,1} & F_{21}N_{i,3} + F_{22}N_{i,1} & F_{31}N_{i,3} + F_{33}N_{i,1} \end{bmatrix} \quad (8)$$

$$B_2^i = \begin{bmatrix} N_{i,1} & 0 & 0 \\ N_{i,2} & 0 & 0 \\ N_{i,3} & 0 & 0 \\ 0 & N_{i,1} & 0 \\ 0 & N_{i,2} & 0 \\ 0 & N_{i,3} & 0 \\ 0 & 0 & N_{i,1} \\ 0 & 0 & N_{i,2} \\ 0 & 0 & N_{i,3} \end{bmatrix} \quad (9)$$

Trong đó, $N_{i,j}$ là đạo hàm của hàm dạng nút i theo phương j . F_{ij} là các thành phần của tensor đạo hàm biến dạng F và được tính toán như bên dưới:

$$F = \frac{\partial x}{\partial X} = 1 + \frac{\partial u}{\partial X} = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} & F_{13} \\ F_{21} & F_{22} & F_{23} \\ F_{31} & F_{32} & F_{33} \end{bmatrix} \quad (10)$$

Trong phương trình (3), thành phần S được gọi là tensor ứng suất Piola-Kirchhoff hai.

$$S = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{21} & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{31} & S_{32} & S_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{bmatrix} \quad (11)$$

Tensor ứng suất $\{S\}$ có mối quan hệ với tensor biến dạng Green-Lagrange $\{E\}$ thông qua định luật St. Venant

$$\{S\} = D : \{E\} \quad (12)$$

Mặc dầu phương trình (12) là tương tự như định luật Hooke's trong đàn hồi tuyến tính nhưng tensor biến dạng Green-Lagrange lại chứa thành phần phi tuyến của biến dạng và được tính như sau:

$$\{E\} = \frac{1}{2}(F^T F - 1) \quad (13)$$

Tensor tính chất vật liệu D trong phương trình (2) và (12) được tính toán như bên dưới:

$$D = \begin{bmatrix} (2\mu + \lambda) & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & (2\mu + \lambda) & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & (2\mu + \lambda) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} \quad (14)$$

Trong đó $\mu = E/[2(\nu + 1)]$ là mô đun cắt và $\lambda = 2\nu\mu/(1 - 2\nu)$ là hệ số Lamé's.

3. MÔ HÌNH TÍCH PHÂN THAY THẾ

Giá trị tích phân trong các phương trình (2)-(5) thường được sử dụng bằng phép gương cầu Gaussian do tính đơn giản và dễ thực hiện. Như đã trình bày trong mục 1, lấy cảm hứng hiệu quả từ phương pháp tích phân EM (Element Midpoint method) được trình bày bởi tác giả Jeyakarthikeyan cùng các cộng sự vào năm 2017 [12] cho phần tử hữu hạn tứ giác bốn nút, trong bài báo này, ý tưởng được mở rộng cho phần tử lục diện 20 nút (3D). Dạng xấp xỉ phép tích phân của một đa thức bất kỳ bằng phương pháp số trong miền lập phương có dạng như sau:

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(\xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta d\zeta \approx \sum_{i=1}^m w_i f_i \quad (15)$$

Với m là số lượng điểm tích phân, w_i là trọng số tương ứng với điểm tích phân thứ i và f_i là giá trị của hàm số f tại điểm đó. Nếu gọi A là giá trị tích phân chính xác của hàm

số $f(\xi, \eta, \zeta)$ trong miền lập phương, A_1 và A_2 hai giá trị xấp xỉ gần đúng khi dùng mô hình điểm giữa gương cầu ở bước kích thước h và $h/2$. Mối quan hệ giữa A và hai giá trị A_1 với A_2 được viết như bên dưới:

$$A = A_1 + h^q C + O(h^{q+1}) \quad (16)$$

Và

$$A = A_1 + \left(\frac{h}{2}\right)^q C + O(h^{q+1}) \quad (17)$$

Trong đó, C là hằng số của phương pháp tính A_1 và A_2 , q là bậc của phương pháp. Bằng cách rút gọn C trong hai phương trình (16) và (17) ta thu được:

$$A = \frac{2^q A_2 - A_1}{2^q - 1} + O(h^{q+1}) \quad (18)$$

Theo phương pháp trung điểm cầu gương thì chính xác đến bậc 2, nghĩa là $q=2$, do đó A được tính gần đúng như sau:

$$A \approx \frac{1}{3}(4A_2 - A_1) \quad (19)$$

Giá trị A , về cơ bản thì gần với lời giải chính xác hơn A_1 và A_2 .

Bây giờ, xét một hàm số $f(\xi, \eta, \zeta)$ đa thức bậc ba có dạng đầy đủ trong miền lập phương như bên dưới:

$$\begin{aligned} f(\xi, \eta, \zeta) = & a_1 + a_2\xi + a_3\eta + a_4\zeta \\ & + a_5\xi^2 + a_6\eta^2 + a_7\zeta^2 \\ & + a_8\xi\eta + a_9\eta\zeta + a_{10}\zeta\xi \\ & + a_{11}\xi^3 + a_{12}\eta^3 + a_{13}\zeta^3 \\ & + a_{14}\xi^2\eta + a_{15}\eta^2\zeta + a_{16}\zeta^2\xi \\ & + a_{17}\xi^2\zeta + a_{18}\eta^2\xi + a_{19}\zeta^2\eta \\ & + a_{20}\xi\eta\zeta \end{aligned} \quad (20)$$

Thực hiện tích phân chính xác đa thức (20) trong miền lập phương $[-1, 1] \times [-1, 1] \times [-1, 1]$ bằng phương pháp giải tích, kết quả thu được như sau:

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(\xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta d\zeta = 8a_1 + \frac{8}{3}a_5 + \frac{8}{3}a_6 + \frac{8}{3}a_7 \quad (21)$$

Các giá trị tích phân số A_1 trong miền lập phương được tính dùng trung điểm bậc hai với một phần tử và A_2 với tám phần tử, kết quả như sau:

$$A_1 = 8f(0,0,0) \quad (22)$$

$$\begin{aligned} A_2 = & f(-0.5, -0.5, -0.5) + f(0.5, -0.5, -0.5) \\ & + f(-0.5, 0.5, -0.5) + f(0.5, 0.5, -0.5) \\ & + f(-0.5, -0.5, 0.5) + f(0.5, -0.5, 0.5) \\ & + f(-0.5, 0.5, 0.5) + f(0.5, 0.5, 0.5) \end{aligned} \quad (23)$$

Thế phương trình (22) và (23) vào phương trình (19) ta thu được kết quả tương tự phương trình (21). Trong thực tế, mô hình 3D-EM được sử dụng với chín điểm tích phân có tọa độ và trọng số tương ứng như trong Bảng 1.

Phương trình (21) là kết quả chính xác khi tích phân một đa thức bậc ba, trong khi phương trình (19) về cơ bản kết quả gần đúng. Đối với một số trường hợp cụ thể của đa thức f , bậc cao nhất là bậc 3, mô hình 3D-EM có thể mang lại giá trị chính xác như phương trình (21) với điểm tích phân và trọng số được lấy như trong Bảng 1.

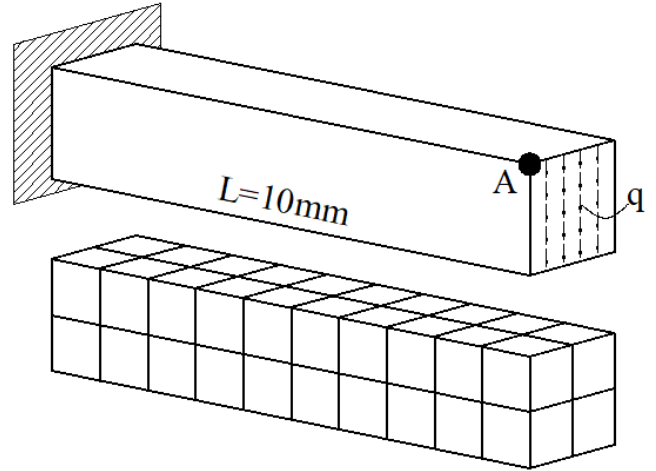
Bảng 1. Điểm tích phân và trọng số tương ứng trong mô hình tích phân thay thế 3D-EM

| Điểm tích phân | Trọng số |
|--------------------|----------|
| (-0.5, -0.5, -0.5) | 4/3 |
| (0.5, -0.5, -0.5) | 4/3 |
| (-0.5, 0.5, -0.5) | 4/3 |
| (0.5, 0.5, -0.5) | 4/3 |
| (-0.5, -0.5, 0.5) | 4/3 |
| (0.5, -0.5, 0.5) | 4/3 |
| (-0.5, 0.5, 0.5) | 4/3 |
| (0.5, 0.5, 0.5) | 4/3 |
| (0.0, 0.0, 0.0) | -8/3 |

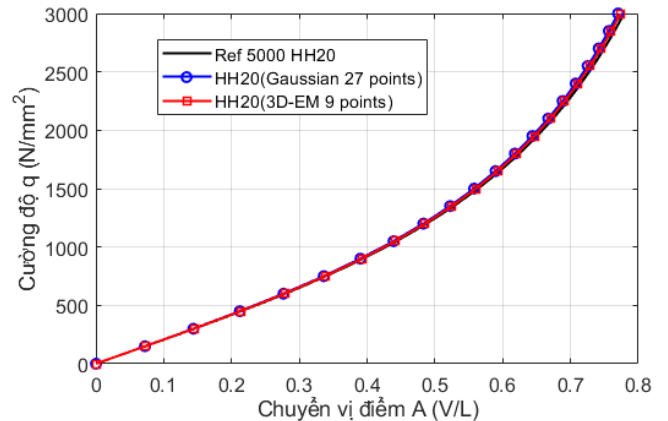
4. VÍ DỤ SỐ VÀ BÌNH LUẬN

4.1 Dầm Cantilever chịu uốn

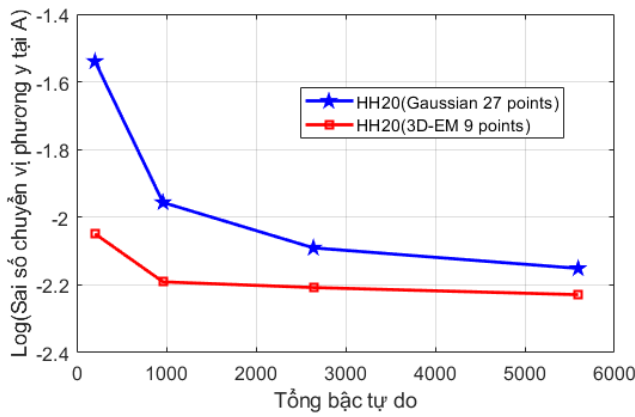
Ví dụ đầu tiên là một dầm chịu uốn có hình dạng như Hình 1. Dầm có chiều dài $10mm$ và mặt cắt ngang có kích thước $2mm \times 2mm$, một đầu của dầm bị ngàm, đầu còn lại chịu lực phân bố bờ mặt theo phương y với độ lớn $q=3000N/mm^2$. Các thông số vật liệu được dùng với $E=21000N/mm^2$, $\nu=0.3$. Dầm được chia lưới phần tử HH20 với 4 cấp độ, 5 phần tử, 40 phần tử, 135 phần tử và 320 phần tử. Chi tiết chia lưới có quy tắc với 40 phần tử được minh họa như trong Hình 1. Lời giải chính xác hoặc tương tự không tìm thấy, do đó, kết quả tham khảo được tạo ra bằng cách chia lưới thật mịn với 5000 phần tử HH20 và được phân tích bằng phần mềm Abaqus.



Hình 1. Dạng hình học của dầm Cantilever và chia lưới 40 phần tử



Hình 2. Chuyển vị tại điểm A khi sử dụng hai mô hình tích phân được so sánh với lời giải tham khảo



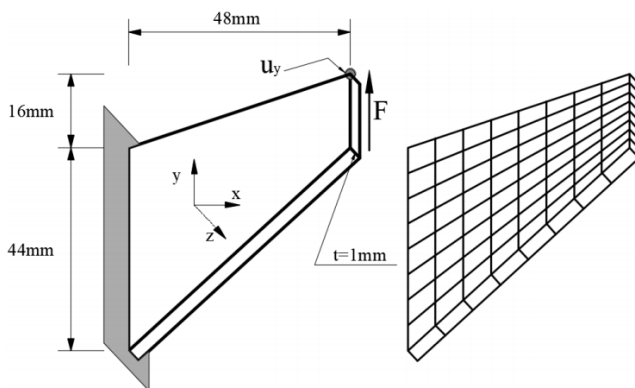
Hình 3. Sai số độ hội tụ chuyển vị phương đứng tại A khi sử dụng hai mô hình tích phân

Hình 2 thể hiện đường cong mối quan hệ giữa chuyển vị và độ lớn của lực tác dụng cho cả tích phân Gaussian truyền thống (3×3×3 điểm) và mô hình tích phân thay thế 3D-EM (9 điểm) với cấp độ chia lưới 40 phần tử. Dữ liệu cho thấy rõ ràng rằng hiệu suất thu được từ mô hình tích phân đề xuất là tốt hơn vì kết quả gần với dữ liệu tham khảo.

Hình 3 thể hiện tốc độ hội tụ của kỹ thuật tích phân thay thế so với tích phân Gaussian. Dữ liệu từ hình ảnh cho thấy tốc độ từ phương pháp nghiên cứu là tốt hơn tích phân Gaussian. Hình 3 với trục hoành thể hiện tổng số bậc tự do trong khi trục tung là logarit sai số của hai mô hình tích phân so với lời giải tham khảo.

4.2 Tấm panel Cook's

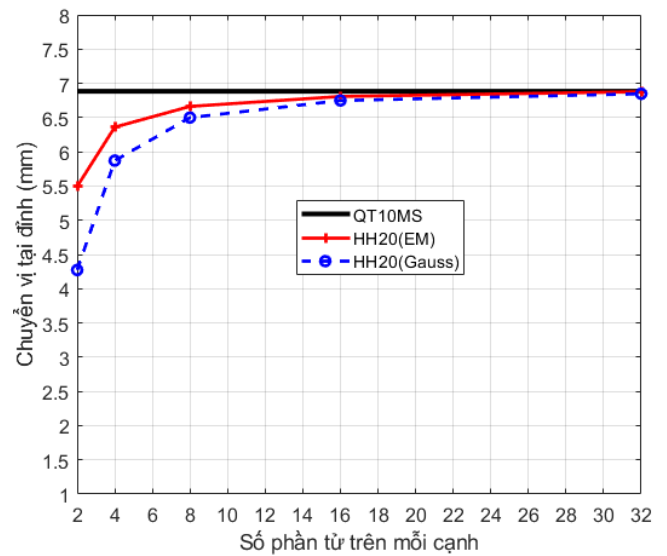
Một tấm mỏng biến dạng phẳng được đề xuất bởi Cook's như là một ví dụ tiêu chuẩn để đánh giá sự chính xác và khả năng hội tụ của phương pháp. Ví dụ này cũng được rất nhiều tác giả phân tích và công bố trước đây [13]. Tấm có một đầu là ngàm, đầu còn lại chịu lực cắt có tổng độ lớn $F=1600N$. Mô hình vật liệu Neo-Hookean được sử dụng với mô đun $E=240.565Mpa$ và hệ số nở hông $\nu=0.4999$ (vật liệu gần như không nén được). Chuyển vị theo phương z được áp bằng không. Vì là tấm mỏng nên tấm chỉ được chia lưới một lớp theo bờ dày, xem Hình 4.



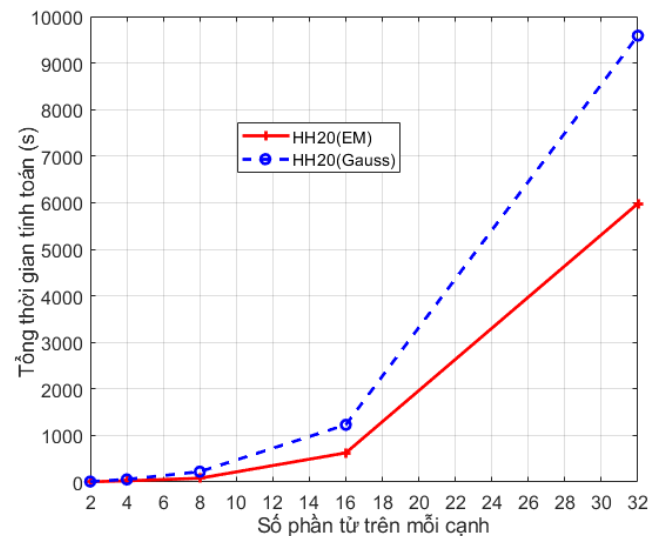
Hình 4. Dạng hình học và chia lưới 8×8×1 tấm Cook's

Hình 5 thể hiện sự hội tụ thông qua chuyển vị đỉnh của mô hình tích phân thay thế so với với tích Gauss truyền thống và phương pháp QT10MS [13]. Dữ liệu cho thấy các phương pháp nghiên cứu và tham khảo đều hội tụ, nhưng kết quả từ mô hình tích phân thay thế thì hội tụ nhanh hơn tích phân Gauss truyền thống mặc dầu số điểm tích phân là ít hơn, 9 điểm so với 27 điểm. Hình 6 thể hiện tổng thời gian tính toán, với số điểm tích phân ít hơn thì rõ ràng thời gian tính toán của mô hình tích phân thay thế là ít hơn

Gauss truyền thống. Nhưng độ chính xác là cao hơn. Do đó, hiệu suất của mô hình thay thế là cao hơn tích phân Gaussian.



Hình 5. So sánh độ hội tụ của chuyển vị tại đỉnh tám Cook's giữa mô hình tích phân thay thế và tích phân Gaussian truyền thống



Hình 6. So sánh tổng thời gian tính toán khi sử dụng mô hình tích phân thay thế và tích phân Gaussian truyền thống trên phần tử HH20

5. KẾT LUẬN

Trong bài báo, kỹ thuật tích phân mới 3D-EM đã áp dụng thành công vào phần tử HH20. Các kết quả thu được cho thấy có sự tương đồng về độ chính xác giữa kỹ thuật tích phân mới và tích phân Gauss truyền thống trong khi thời gian cần thiết của kỹ thuật tích phân mới là ít hơn vì số điểm tích phân ít hơn. Như vậy, việc áp dụng kỹ thuật tích phân mới vào phần tử HH20 cho phép nâng cao hiệu suất của phương pháp phần tử hữu hạn mà còn giải quyết các bài toán phức tạp khi cần nhiều thời gian tính toán như bài toán cô kết, phi tuyến vật liệu trong tương lai.

6. LỜI CẢM ƠN

Nhóm tác giả xin chân thành cảm ơn Trường Đại học Lạc Hồng (LHU-RF-TE-19-03-04) đã tạo điều kiện để nhóm hoàn thành nghiên cứu này.

7. TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] A. Apostolatos, K. U. Bletzinger, R. Wuchner, Weak imposition of constraints for structural membranes in transient geometrically nonlinear isogeometric analysis on multipatch surfaces, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **2019**, 350, 938–994.
- [2] Y. Mei, D. . Hurtado, S. Pant, A. Aggarwal, On improving the numerical convergence of highly nonlinear elasticity problems, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **2018**, 337, 110–127.
- [3] M. Schwarze, I. N. Vladimirov, S. Reese, Sheet metal forming and springback simulation by means of a new reduced integration solid-shell finite element technology, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **2011**, 200, 454–476.
- [4] M. A. Crisfield, *Non-linear Finite Element Analysis of Solids and Structures Volume 1: Essentials*, John Wiley & Sons, Inc., **1991**.
- [5] R. D. Wood, O. C. Zienkiewicz, Geometrically nonlinear finite element analysis of beams, frames, arches and axisymmetric shells, *Computers and Structures*, **1977**, 7, 725–735.
- [6] B. Izzuddin, Conceptual issues in geometrically nonlinear analysis of 3d framed structures, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **2001**, 191, 1029–1053.
- [7] S. Lopez, G. L. Sala, A finite element approach to statical and dynamical analysis of geometrically nonlinear structures, *Finite Elements in Analysis and Design*, **2010**, 46, 1093–1105.
- [8] H. Kurtaran, Geometrically nonlinear transient analysis of thick deep composite curved beams with generalized differential quadrature method, *Composite Structures*, **2015**, 128, 241–250.
- [9] J. Lin, H. Naceur, D. Coutellier, A. Laksimi, Geometrically nonlinear analysis of two-dimensional structures using an improved smoothed particle hydrodynamics method, *Engineering Computations*, **2015**, 32, 779–805.
- [10] H. Cho, H. Kim, S. Shin, Geometrically nonlinear dynamic formulation for three-dimensional corotational solid elements, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **2018**, 328, 301–320.
- [11] K. Liang, M. Abdalla, O. Sun, A modified newton-type koiter-newton method for tracing the geometrically nonlinear response of structures, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **2018**, 113, 1541–1560.
- [12] P. V. Jeyakarthikeyan, G. Subramanian and R. Yogheshwaran, An alternate stable midpoint quadrature to improve the element stiffness matrix of quadrilaterals for application of functionally graded materials, *Computers and Structures*, **2017**, 178, 71–87.
- [13] P. Nguyen, M. Doskar, A. Pakravan, P. Krysl, Modification of the quadratic 10-node tetrahedron for thin structures and stiff materials under large-strain hyperelastic deformation, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **2017**, 114 (6), 619–636.